A Matemática da Medição

Marcelo Sampaio de Alencar
Instituto de Estudos Avançados em Comunicações (iecom)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

1 Introdução

Pode não parecer, a princípio, mas a contagem é uma das principais atividades humanas, desde tempos pré-históricos. Essa atividade começou com o uso dos dedos, o que resultou no sistema decimal e na criação do termo dígito para designar número. A contagem, ou medição, é um processo abstrato, em que objetos físicos, palpáveis, são vistos como símbolos numéricos (1).

2 O Processo de Contagem

Contar pode sido a primeira forma de abstração humana, mas não é uma atividade exclusiva desta espécie. Outros animais também têm capacidade de contar, o que pode ser notado facilmente ao se retirar um dos filhotes de qualquer bicho. Entretanto, a facilidade de representar de forma simbólica a medição de qualquer fenômeno ou objeto é tipicamente humana.

A Engenharia é baseada no conceito de medida. Desde épocas remotas os egípcios já mediam as áreas ao longo das margens do Nilo, para realizar a semeadura após as enchentes periódicas. Como o terreno não era reto, estratégias engenhosas, que usavam figuras geométricas de áreas conhecidas, foram desenvolvidas para a tarefa.

Entretanto, a primeira civilização a sistematizar o estudo de áreas foi certamente a grega. Matemáticos como Eudoxo de Cnido (atual Turquia), Euclides e Arquimedes, deram contribuições fundamentais para o cálculo da área de polígonos, círculos e outras figuras geométricas.

Eudoxo (390-338 a.C.) inventou o método da exaustão, que permitia aproximar duas quantidades desiguais pela redução de suas diferenças. Foi um dos pioneiros no estudo das curvas esféricas, usadas na astronomia antiga. Ele também foi o primeiro a escrever sobre proporções e considerar os números como razões entre comprimentos, que levou mais tarde ao descobrimento dos números racionais.

Euclides de Alexandria (360-295 a.C.) foi professor, matemático da escola de Platão, escritor e criador da geometria euclidiana, um feito formidável para seu tempo. Os Elementos de Euclides, obra publicada em 300 a.C., em treze volumes, continha cinco sobre geometria plana, três sobre números, um sobre a teoria das proporções, um sobre incomensuráveis e os três últimos sobre geometria no espaço. Essa obra monumental tornou-se o mais influente texto científico de todos os tempos e uma das publicações mais citadas em qualquer época.

Arquimedes (287-212 a.C.), nasceu em Siracusa, e chegou incrivelmente perto de desenvolver o cálculo moderno, com seu método de aproximação de áreas por polígonos inscritos, dezenove séculos antes de Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Nesse desenvolvimento, ele usou extensivamente o método de exaustão de Eudoxo. Entretanto, a descrição do processo usado por ele ficou perdida por mais de dois milênios, até que o manuscrito de seu livro, O Método, foi encontrado, em 1906.

Arquimedes acreditava que tudo poderia ser medido, independente da dimensão do objeto. Melhorou o sistema grego de numeração, criando uma notação cômoda para os números muito grandes, similar ao atual sistema exponencial e também calculou a área do círculo usando a técnica de triângulos inscritos associada ao método da exaustão.

3 O Conceito de Infinito

O conceito de infinito já permeava os gregos da era clássica, desde a época de Zenão de Eléia (495-430 a.C.). Ele foi o criador de quatro paradoxos famosos, que não puderam ser explicados pela lógica de seu tempo, por requerer os conceitos modernos de convergência de séries e limites. Usando uma noção de medida, Zenão conjecturou que qualquer movimento seria impossível (2).

Seu raciocínio era o seguinte. Se uma flecha for lançada em direção a um alvo, ela deve inicialmente percorrer metade da distância. Em seguida, mais metade da distância restante, e assim por diante. Como as distâncias se tornam menores a cada iteração, a flecha acabaria parada no ar! Claro, esse problema é hoje solucionado com o uso de convergência de séries infinitas, mas esse conceito não estava disponível naquele tempo.

Johannes Kleper (1571-1630) pensou nas áreas de figuras planas e volumes de sólidos como um número infinito de elementos infinitesimais, provavelmente influenciado pelo antigo método da exaustão. Galileu Galilei (1564-1642) desenvolveu um método de integração, mostrando que, para aceleração uniforme, a área sob a curva velocidade versus tempo era a distância percorrida. Ele chegou muito perto do teorema fundamental do Cálculo. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) usou as idéias de Kepler e Galileu, e deu continuidade ao estudo de áreas de figuras planas e volumes a partir de indivisíveis.

O desenvolvimento do método geral de cálculo só foi possível graças ao trabalho independente de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Ambos concluíram que a integração era a operação inversa da diferenciação, apesar de não terem formulado isso de forma precisa.

Newton criou os fluxions, que ele usava para ilustrar a noção de incremento. Leibniz descobriu o cálculo enquanto lidava com seqüências de funções. Ele é responsável pela criação do símbolo de integral, assim como do diferencial. A idéia da integração como uma soma e da diferenciação como um tipo de subtração levou Leibniz a pensar na integral e derivada como processos inversos.

O tratamento rigoroso da integração foi o trabalho de Augustin Louis Cauchy (1789-1857), que definiu e provou a existência da integral de uma função contínua como o somatório do produto de valores da função por partições associadas do intervalo de medida. Ele também demonstrou o teorema fundamental do Cálculo, usando sua definição, e estudou as integrais impróprias.

Muitos estudantes de Engenharia e Matemática gostariam que essas integrais, por serem impróprias, não devessem ser mostradas abertamente, talvez por não terem limites ou, quem sabe, por apresentarem o infinito como limite inferior ou superior.

4 A Integral Moderna

Bernhard Riemann (1826-1866), que dá nome ao método de integração usual em Engenharia, generalizou o trabalho de Cauchy com integrais e publicou um estudo sobre séries trigonométricas. A utilização do cálculo integral para medição de áreas e volumes passou a ser comum (3).

A noção moderna da integral de Riemann foi finalizada por Gaston Darboux (1842-1917), que demonstrou que uma função é integrável, ou tem sua área mensurável, quando as somas superior e inferior de Riemann convergem para o mesmo valor, à medida em que os subintervalos tendem a zero, para qualquer partição usada.

Porém, mesmo com a generalização do conceito de medida, usando a integral, alguns Matemáticos descobriram funções que não podiam ser integradas, ou seja, suas áreas não tinham como ser medidas com a régua de Riemann.

Lejeune Dirichlet (1805-1859), foi um dos responsáveis pelo impasse, ao considerar uma função que assume o valor unitário, para valores do conjunto dos racionais, e zero, para pontos no conjunto dos irracionais. Ambos são subconjuntos do conjunto dos números reais.

O conjunto dos irracionais é não enumerável, assim como o conjunto dos reais. Ele é denso e tem cardinalidade do contínuo, enquanto o conjunto dos racionais tem mesma potência do conjunto dos números naturais, ou seja, é contável. A função de Dirichlet tem então um número infinito de descontinuidades, e não pode ser medida com a integral de Riemann. É como usar uma régua para medir um comprimento que está recheado de buracos.

O conceito formal de medida, derivado inicialmente da mensuração de comprimentos e áreas, precisava ser estabelecido. Ele sempre foi ligado, no caso da reta, por exemplo, à medida ou conteúdo de um intervalo determinado. Camille Jordan (1838-1922) e Giuseppe Peano (1858-1932) introduziram a idéia de conteúdo interno e externo de um conjunto, precursora da noção formal de medida.

Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956) criou a primeira teoria da medida de conjunto de pontos. Ele redefiniu o conteúdo de um conjunto como sua medida, a partir do trabalho de Georg Ferdinand Ludwig Cantor (1845-1918). E também definiu a medida da união de conjuntos como a soma das medidas individuais e mostrou que conjuntos de medida não nula são não enumeráveis, ou seja, não podem ser colocados em correspondência biunívoca (todos os elementos emparelhados) com os números naturais.

O raciocínio pode ser posto da seguinte maneira: a medida de um subintervalo da reta que contém apenas um ponto é certamente zero, porque um ponto não ocupa espaço. Um conjunto finito de tais pontos também tem medida zero, porque seria o somatório de medidas nulas. Um conjunto enumerável (contável) de pontos, mesmo que seja infinito, apesar de ser mais difícil de visualizar, também tem medida nula.

Na função apresentada por Dirichlet, os pontos racionais são levados, ou mapeados, na unidade, mas todos têm medida nula. Então, a medida de qualquer subintervalo dessa função deveria depender apenas dos números irracionais.

O estudo do contínuo, que envolve conjuntos incontáveis, infinitos ainda maiores que outros infinitos e números transfinitos, foi desenvolvido por Cantor. A medição desses conjuntos, e das funções das quais são domínios, foi o trabalho de Henri Lebesgue – o matemático que sabia medir.

5 A Integral de Lebesgue

Henri Léon Lebesgue (1875-1941) foi um notável matemático francês que nasceu na cidade de Beauvais. Apesar da polêmica que causou, ao criar um conceito de integral distinto daquele de Riemann, foi considerado um dos mais originais e produtivos do início do século XX. Ele provocou uma mudança substancial na análise moderna, com a teoria da integração de funções de variável real (4).

Lebesgue formulou a teoria da medida em um artigo seminal, publicado no periódico francês Comptes Rendus, em 29 de abril de 1901, e defendeu sua tese de doutorado na Faculdade de Ciéncias de Paris, em 1902, de certa maneira revolucionando a teoria da integração. Seu trabalho foi bastante influenciado pelos artigos de René-Louis Baire (1874-1932), sobre funções descontínuas.

O método de Lebesgue para cálculo da integral de uma função basicamente mede todos os indivisíveis (intervalos infinitesimais) que correspondem a determinado valor da função, para então adicionar as medidas. Isso é equivalente a trabalhar com o diferencial da função, ou variável dependente, em vez de operar com o diferencial da variável independente.

É, em certa medida, equivalente ao cálculo da média estatística de uma variável aleatória. Conta-se primeiro quantos resultados são favoráveis a determinado valor, depois a outro, até contabilizar todos os valores. As freqüências de ocorrência de cada valor no conjunto são multiplicadas pelos próprios valores e depois tudo é somado.

A média é a mesma obtida com a soma de todos os valores, dividida pelo total de resultados, procedimento que foi associado ao método de Riemann pelo próprio Lebesgue. A diferença entre os métodos aparece quando, segundo ele, os conjuntos de resultados têm dimensão infinita e há infinitas descontinuidades.

Quando a função tem integral, ou área, de Riemann, esse resultado é exatamente a integral de Lebesgue. Entrentanto, há funções, como aquela de Dirichlet, que não são mensuráveis com o método de Riemann, mas que têm integral de Lebesgue. Aliás, a medida da área sob a curva dessa função é zero, pela medida de Lebesgue.

Seguindo uma tradição francesa, Lebesgue ensinou nas universidades de Rennes e Poitiers, antes de se tornar professor do Collège de France e de ser nomeado para a Sorbonne, em 1910. Até sua época, a integração era limitada a funções contínuas. Ele generalizou a integral de Riemann, criando assim uma nova medida que pode ser aplicada ao cálculo de áreas de funções descontínuas.

A Teoria da Medida, criada por Lebesgue, juntamente com a Teoria dos Conjuntos, desenvolvida por Cantor, formaram a base para a axiomatizaçao da Teoria da Probabilidade, por Andrei Kolmogorov (1903-1987). As três teorias são capítulos essenciais da Matemática, com aplicação a diversas outras disciplinas.

6 Conclusão

A Teoria da Medida, além de todas as aplicações em diversas áreas da Engenharia, é também fundamental para a moderna Teoria da Informação, disciplina essencial para entender a natureza da comunicação e para o cálculo da capacidade de canais de transmissão. Assim como a Teoria dos Conjuntos revolucionou o ensino da Matemática, a Teoria da Medida lidera uma mudança, que completou um século, no Cálculo Integral.

Lebesgue foi reconhecido como um dos principais matemáticos de sua época e eleito para a Academia de Ciências de Paris, para a Sociedade Matemática e para a Sociedade Real de Londres, entre outras. Realizou notáveis trabalhos nos campos da topologia e das séries numéricas aplicadas aos teoremas de conservação da energia, e ampliou a teoria desenvolvida por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), que é largamente usada em Teoria das Comunicações.

Referências

Marcelo S. Alencar. O Matemático que Sabia Medir – I. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Abril 2008.

Marcelo S. Alencar. O Matemático que Sabia Medir – II. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Abril 2008.

Marcelo S. Alencar. O Matemático que Sabia Medir – III. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Maio 2008.

Marcelo S. Alencar. O Matemático que Sabia Medir – IV. Artigo para jornal eletrônico na Internet, Jornal do Commercio *On Line*, Recife, Brasil, Maio 2008.